CHIFFRES - 2 - 1961.

Modification de la longueur du pas dans l'intégration numérique par les méthodes à pas liés *

par F. Ceschino.

L'auteur propose des formules de modification du pas au cours de l'intégration numérique d'un système différentiel — ces formules sont obtenues dans le cas des méthodes explicites et implicites d'Adams; une étude de l'erreur montre leur intérêt.

The author gives formulae for changing the step during numerical integration of a differential system. These formulae are obtained for the Adams' methods of extrapolation and interpolation; a study of the error shows their usefulness.

Der Verfasser schlägt Formeln vor, um die Schrittweite im Verlauf der numerischen Integration eines Differentialsystems zu ändern. Diese Formeln wurden für die Adamsschen Extrapolations — und Interpolationsverfahren aufgestellt; eine Untersuchung über den Fehler zeigt ihre Nützlichkeit.

Автор дает формулы смены шага при численном интегрировании диффе-рен циальной системы. Формулы получены для явных и неявных методов Адамса. Интерес этих формул доказан изучением погрешностей.

Procédés ordinairement employés.

D'ordinaire, on se contente de multiplier ou de diviser par 2 la valeur du pas, ces deux opérations présentant déjà de sérieuses difficultés, surtout en calcul automatique, point de vue auquel nous nous placerons uniquement.

---

* Le principe de ce procédé a été exposé par l'auteur au cours d'une conférence à l'AFCAL, en mai 1960.

En effet :

— Dans le cas de doublement, il faut faire appel à des quantités qui ne sont encore disponibles que moyennant un encombrement de la mémoire.

— Dans le cas de la dichotomie, on est contraint d'utiliser des méthodes d'interpolation pour calculer les valeurs intermédiaires.

Ces procédés, en plus du manque de souplesse et des difficultés de programmation qu'ils impliquent, ont deux inconvénients :

— Variation brusque de l'erreur par pas qui se trouve brutalement multipliée ou divisée par 2^{q+1} pour une formule d'ordre q;

— Emploi de programmes différents et par suite manque d'homogénéité dans les résultats, dans le cas de la dichotomie.

Procédé proposé.

Soit le système canonique :

$$y' = \mathrm{Y}(y,t)$$

et la formule explicite :

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=0}^{p} \mathrm{A}_j \, \mathrm{Y}_{i-j}. \tag{1}$$

Supposons qu'à partir du point d'abscisse $t = t_s$, on veut remplacer le pas h par le pas ωh où ω est une quantité positive quelconque. Le changement de pas se fera au moyen d'une formule du type :

$$y_{s+(k+1)\omega} = y_{s+k\omega} + h \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{B}_{j,k} \, \mathrm{Y}_{s+(k-j)\omega} + h \sum_{j=0}^{p-k} \mathrm{C}_{j,k} \, \mathrm{Y}_{s-j} \, . \tag{2}$$

En faisant successivement $k = 0, 1, \ldots, p-1$, on calculera p valeurs de y qui, avec y_s permettront de poursuivre l'intégration en revenant à la formule (1) avec le pas ωh.

Expression des coefficients B et C.

Dans la formule (2), les coefficients B correspondent aux indices de la forme $s + m\omega$, tandis que les coefficients C correspondent à des points obtenus par la formule (1) au pas h.

Ces coefficients peuvent s'exprimer sous forme d'intégrales :

$$B_{j,k} = \frac{(-1)^j C_k \omega h}{k!\,[(k-j)\omega+1][(k-j)\omega+2]\ldots[(k-j)\omega+p-k]} \int_0^1 \frac{P_k(u)\,du}{u+j}$$

$$C_{j,k} = \frac{(-1)^{j+k} C^j_{p-k}\, \omega^{k+1} h}{(p-k)!\,(\omega+j)(2\omega+j)\ldots\ldots(k\omega+j)} \int_0^1 \frac{P_k(u)\,du}{(u+k)\omega+j}$$

où : $P_k(u) = u(u+1)\ldots(u+k)[(u+k)\omega+1]\ldots[(u+k)\omega+p-k]$

Formules de changement de pas dans les formules d'Adams explicites.

Pour $p = 1$, on a un seul point intermédiaire à calculer :

$$y_{s+\omega} = y_s + \frac{h\omega}{2}\left[(2+\omega)\,Y_s - \omega\,Y_{s-1}\right]$$

la partie principale de l'erreur sur ce pas étant :

$$\frac{\omega^2}{12}(2\omega + 3)h^3 y^{\mathrm{III}}.$$

Pour $p = 2$, il faut calculer deux points intermédiaires, soit :

$$y_{s+\omega} = y_s + \frac{\omega h}{12}\left[(12+9\omega+2\omega^2)Y_s - 4\omega(3+\omega)Y_{s-1} + \omega(3+2\omega)Y_{s-2}\right]$$

erreur sur ce pas : $\frac{\omega^3}{24}(\omega+2)^2 h^4 y^{\mathrm{IV}}$,

$$y_{s+2\omega} = y_{s+\omega} + \frac{\omega h}{6(\omega+1)}\left[(14\omega+9)Y_{s+\omega} - (3+5\omega)(1+\omega)Y_s + 5\omega^2 Y_{s-1}\right]$$

erreur sur ce pas : $\frac{\omega^3}{72}(17\omega+10)\, h^4 y^{\mathrm{IV}}$

Pour $p = 3$, trois valeurs intermédiaires sont nécessaires :

$$y_{s+\omega} = y_s + \frac{\omega h}{24}\Big[(\omega^3+8\omega^2+22\omega+24)Y_s - \omega(3\omega^2+20\omega+36)Y_{s-1} + \\ + \omega(3\omega^2+16\omega+18)Y_{s-2} - \omega(\omega+2)^2 Y_{s-3}\Big]$$

erreur sur ce pas : $\frac{\omega^2}{720}(6\omega^3+45\omega^2+110\omega+290)\,h^5 y^{V}$,

$$y_{s+2\omega} = y_{s+\omega} + \frac{\omega h}{4}\Big[\frac{15\omega^2+28\omega+12}{(\omega+1)(\omega+2)}Y_{s+\omega} - \frac{17\omega^2+30\omega+12}{6}Y_s + \\ + \frac{\omega^2(17\omega+20)}{3(\omega+1)}Y_{s-1} - \frac{\omega^2(17\omega+10)}{6(\omega+2)}Y_{s-2}\Big]$$

erreur sur ce pas : $\frac{\omega^3}{2880}(293\omega^2+510\omega+200)\,h^5 y^{V}$,

$$y_{s+3\omega} = y_{s+2\omega} + \frac{\omega h}{24}\Big[\frac{119\omega+46}{2\omega+1}Y_{s+2\omega} - \frac{2(43\omega+16)}{\omega+1}Y_{s+\omega} + \\ + (27\omega+10)Y_s - \frac{54\omega^3}{(2\omega+1)(\omega+1)}Y_{s-1}\Big]$$

erreur sur ce pas : $\frac{\omega^4}{1440}(367\omega+135)\,h^5 y^{V}$

Formules implicites.

Soit la formule :

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=0}^{p} A_j\, Y_{i+1-j}.$$

Le procédé est le même que pour les formules explicites. On donnerait également une expression sous forme d'intégrale des coefficients. Voici les formules pour les premières valeurs de p :

Pour $p = 1$, aucun point intermédiaire à calculer.

Pour $p = 2$, un point intermédiaire à calculer par la formule :

$$y_{s+\omega} = y_s + \frac{h\omega}{6(1+\omega)}\Big[(3+2\omega)Y_{s+\omega} + (3+\omega)(1+\omega)Y_s - \omega^2 Y_{s-1}\Big]$$

erreur sur ce pas :

$$\frac{-\omega^3(\omega+2)}{72}\,h^4 y^{IV}$$

Pour $p = 3$, deux points intermédiaires :

$$y_{s+\omega} = y_s + \frac{h\omega}{4}\left[\frac{\omega+2}{\omega+1} Y_{s+\omega} + \frac{\omega^2+6\omega+12}{6} Y_s - \frac{\omega^2(\omega+4)}{3(\omega+1)} Y_{s-1} + \frac{\omega^2}{6} Y_{s-2}\right]$$

erreur sur ce pas : $\dfrac{-\omega^3}{1440}(3\omega^2+15\omega+20)\, h^5 y^{\text{V}}$,

$$\overset{*}{y}_{s+2\omega} = y_{s+\omega} + \frac{h\omega}{4}\left[\frac{17\omega+10}{6(2\omega+1)} Y_{s+2\omega} + \frac{11\omega+8}{3(\omega+1)} Y_{s+\omega} - \frac{3\omega+2}{6} Y_s + \frac{\omega^3}{(2\omega+1)(\omega+1)} Y_{s-1}\right]$$

erreur sur ce pas : $\dfrac{-\omega^4}{1440}(23\omega+15)\, h^5 y^{\text{V}}$

Intérêt du procédé exposé.

— Simplification des calculs : les formules utilisées ont une forme unique, seuls leurs coefficients changent durant la modification du pas. Cet avantage est important en calcul automatique, le changement des coefficients se faisant très simplement.

— Changement automatique du pas : le procédé de MILNE par prédiction-correction permettant d'évaluer l'erreur par pas, on déterminera automatiquement la longueur du pas par le procédé connu (cf. GARNIER, *Mémorial de l'Artillerie Française,* 1929) :

$$h_{i+1} = h_i \sqrt[q]{\frac{\varepsilon}{\eta_i}} \qquad h_i = t_{i+1} - t_i,$$

q désignant l'ordre de la méthode utilisée, ε une erreur arbitrairement fixée, et η_i l'erreur au point t_{i+1}. Cette formule donne ω.

Pour éviter le calcul des coefficients (fonctions de ω) et l'extraction de la racine, on pourra construire une table de correspondance entre un choix des valeurs pour η et les valeurs correspondantes des coefficients des formules donnant les points intermédiaires.

— Modification progressive de l'erreur par pas : au lieu d'être brutalement multipliée ou divisée par 2^{q+1} (pour une formule d'ordre q) l'erreur se modifie progressivement durant le changement de pas. Ainsi, pour la formule implicite à $p = 3$, avec $\omega = \frac{1}{2}$ et $\omega = 2$, on trouve, pour coefficient de $h^5 y^{\text{V}}$ dans le terme d'erreur, les valeurs (approximatives) suivantes :

t	t_s	$t_{s+\omega}$	$t_{s+2\omega}$	$t_{s+3\omega}$
$\omega = \frac{1}{2}$	$\dfrac{19}{720}$	$\dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{19}{720}$	$\dfrac{1}{20} \cdot \dfrac{19}{720}$	$\dfrac{1}{32} \cdot \dfrac{19}{720}$
$\omega = 2$	$\dfrac{19}{720}$	$13 \cdot \dfrac{19}{720}$	$25 \cdot \dfrac{19}{720}$	$32 \cdot \dfrac{19}{720}$

Remarque. — On notera qu'un nouveau changement de valeur de h ne peut pas être fait pendant le calcul des points intermédiaires, ce qui rend le procédé légèrement moins souple que dans le cas des méthodes à pas séparés.